MODUL
TEMA 13

Berani Menjawab Tantangan

MATEMATIKA PEMINATAN PAKET C SETARA SMA/MA KELAS XII

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal PAUD, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah
Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus
Tahun 2020

MODUL
TEMA 13

Berani Menjawab Tantangan

MATEMATIKA PEMINATAN PAKET C SETARA SMA/MA KELAS XII

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal PAUD, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah
Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus
Tahun 2020

Matematika Peminatan Paket C Setara SMA/MA Kelas XII
Modul Tema 13 : Berani Menjawab Tantangan

- **Penulis:** Hendra Lesmana, M.Pd.; Renny Anggreini,S.Pd.; Drs. G. Kundaru.
- **Editor:** Dr. Samto; Dr. Subi Sudarto
  Dra. Maria Listiyanti; Dra. Suci Paresti, M.Pd.; Apriyanti Wulandari, M.Pd.

- **Diterbitkan oleh**: Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus–Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah–Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

vi+ 40 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, 1 Juli 2020
Plt. Direktur Jenderal

Hamid Muhammad

Daftar Isi

Daftar Gambar

BERANI MENJAWAB TANTANGAN

Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk dapat memahami isi modul ini secara maksimal, Anda harus mengikuti petunjuk penggunaan modul, yaitu:

1. Perhatikan istilah-istilah yang digunakan dalam modul seperti:

   Petunjuk Penggunaan Modul

   Bagian ini berisi langkah-langkah yang harus dilakukan untuk memahami modul.

   Tujuan Pembelajaran

   Bagian ini berisi kemampuan-kemampuan yang dikuasai setelah mempelajari modul.

   Pengantar

   Bagian ini berisi gambaran uraian materi yang dibahas di dalam modul.

   Penugasan

   Bagian ini berisi kegiatan yang dilakukan oleh peserta didik dalam memahami konsep materi di dalam modul.

Latihan Unit

Bagian ini berisi soal-soal yang dikerjakan oleh peserta didik sebagai penguatan dalam meningkatkan kemampuan peserta didik.

Rangkuman

Bagian ini berisi ringkasan materi modul secara keseluruhan. Beberapa rumus, persamaan, dan konsep-konsep yang penting disajikan dalam rangkuman sebagai penguatan bagi peserta didik.

Latihan Akhir

Bagian ini berbeda dengan latihan pada unit-unit. Bagian ini adalah latihan secara menyeluruh yang terdiri dari seluruh unit dalam modul ini.

Kunci Jawaban

Bagian ini berisi deskripsi jawaban latihan dan atau kriteria dari suatu penugasan. Bagian ini dibuka setelah peserta didik menyelesaikan latihan dan atau penugasan yang dikerjakan setelah mempelajari modul ini.

Glosarium

Berisi istilah-istilah yang menjelaskan konsep yang relevan dengan materi.

Saran Referensi

Bagian ini berisi sumber-sumber lain yang dapat digunakan sebagai tambahan bahan pembelajaran yang direkomendasikan untuk dicari. Bagian ini lebih menekankan tambahan pengetahuan bagi peserta didik.

Daftar Pustaka

Bagian ini berisi sumber-sumber bahan bacaan penyusun modul.

2. Modul ini disusun sedemikian rupa dengan tujuan Anda dapat secara mandiri mempelajari materi modul ini. Namun, apabila masih terdapat kendala dapat dikonsultasikan kepada tutor. Selain itu, Anda juga diberikan penugasan-penugasan yang dikerjakan dalam kelompok-kelompok.
3. Anda juga dapat mencari sumber bacaan lain yang relevan dengan materi pada modul sebagai sumber belajar tambahan.

Catatan:

1. Jangan tergoda untuk melihat kunci jawaban sebelum menyelesaikan soal latihan baik di tiap unit maupun di akhir modul.
2. Jangan tergoda untuk melihat bagian rangkuman tanpa mempelajari uraian materi

Kriteria Pindah / Lulus Modul

Anda dianggap tuntas dalam mempelajari modul ini dan boleh pindah ke modul berikutnya apabila peserta didik mencapai nilai 70 yang dihitung dari perpaduan soal penugasan dan latihan, baik latihan pada tiap-tiap unit maupun latihan pada akhir modul. Untuk menghitung perolehan nilai peserta didik menggunakan rumus berikut:

$$NA = 30\%\ NRP + 30\%\ NRLU + 40\%\ NLA$$

Keterangan:

NA = Nilai akhir

NRP = Nilai rata-rata penugasan tiap-tiap unit

NRLU = Nilai rata-rata latihan pada tiap-tiap unit

NLA = Nilai latihan akhir modul

Jika nilai Anda masih di bawah 70, maka dianjurkan untuk mempelajari kembali terutama bagian yang belum dikuasai.

Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Setelah mempelajari modul 13 ini, diharapkan peserta didik mampu:

1. Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dari suatu fungsi yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva suatu fungsi trigonometri dengan menggunakan sifat-sifat dan langkah-langkah penyelesaiannya.
2. Menjelaskan keberkaitan turunan kedua dari suatu fungsi yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva suatu fungsi trigonometri dengan menggunakan sifat-sifat dan langkah-langkah penyelesaiannya limit fungsi trigonometri menggunakan contoh atau peristiwa kontekstual.

Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva dari fungsi trigonometri dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah sesuai dengan karakteristik masalahnya.

Pengantar Modul

Pernahkah Anda menaiki *roller coaster*? Atau pernahkah Anda menaiki *motocross*? Tentunya sangat menegangkan bukan? Sangat memacu hormon adrenalin di tubuh kita. Tetapi tahukah bahwa terdapat pelajaran yang sangat berharga yang dapat kita petik dari kegiatan-kegiatan yang menguji nyali tersebut.

Modul 13 ini terdiri dari 2 unit, yaitu unit 1 yang berjudul *Roller Coaster*, dan unit 2 yang berjudul *Motocross*. Semua judul unit tersebut sangat melekat di kehidupan sehari-hari. *Roller Coaster* memiliki lintasan yang berliku-liku bahkan ada yang berbentuk melingkar. Di dalam *roaller coaster* terdapat suatu titik tertinggi dan titik terendah. Semua hal dalam *roaller coaster* dibahas pada unit 1. *Motocross* juga memiliki lintasan yang berliku-liku dan memiliki titik tertinggi dan titik terendah juga seperti *roaller coaster*. Semua hal berkaitan dengan *motocross* dibahas dalam unit 2.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat 1) menjelaskan keberkaitan turunan pertama dari suatu fungsi yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva suatu fungsi trigonometri dengan menggunakan sifat-sifat dan langkah-langkah penyelesaiannya; 2) menjelaskan keberkaitan turunan kedua dari suatu fungsi yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva suatu fungsi trigonometri dengan menggunakan sifat-sifat dan langkah-langkah penyelesaiannya limit fungsi trigonometri menggunakan contoh atau peristiwa kontekstual; dan 3) menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva dari fungsi trigonometri dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah sesuai dengan karakteristik masalahnya.

Modul ini disajikan dalam konteks yang sangat dekat dengan kehidupan sehari-hari. Modul ini dilengkapi dengan penugasan dan latihan untuk dapat menguji kemampuan Anda dalam mempelajari modul ini. Selamat Belajar!

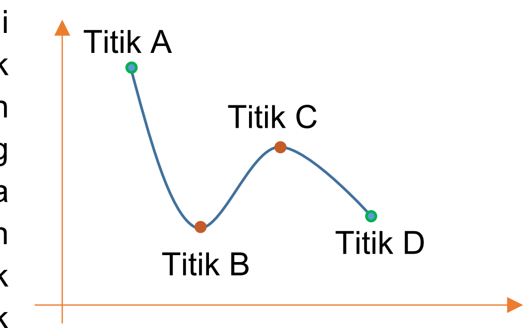
UNIT 1. *ROLLER COASTER*

Sumber: https://m.detik.com/travel/domestic-destination/d-2550705/halilintar-roller-coaster-yang-pasti-dicoba-di-dufan

Gambar 1 *Roller Coaster* Halilintar yang Berada di Dunia Fantasi Ancol, Jakarta Utara

Halilintar adalah nama salah satu *roller coaster* yang terdapat di Dunia Fantasi (Dufan) Ancol, Jakarta Utara yang dibangun pada tahun 1985. *Roller coaster* dapat dilalui dalam waktu 1 menit 45 detik dengan kecepatan yang berbeda-beda saat **menanjak** dan saat **menurun**. Kursi bagian depan dan bagian belakang adalah yang paling **menantang.** Pernahkah Anda mencobanya? Bagi yang belum pernah, silakan mencobanya.

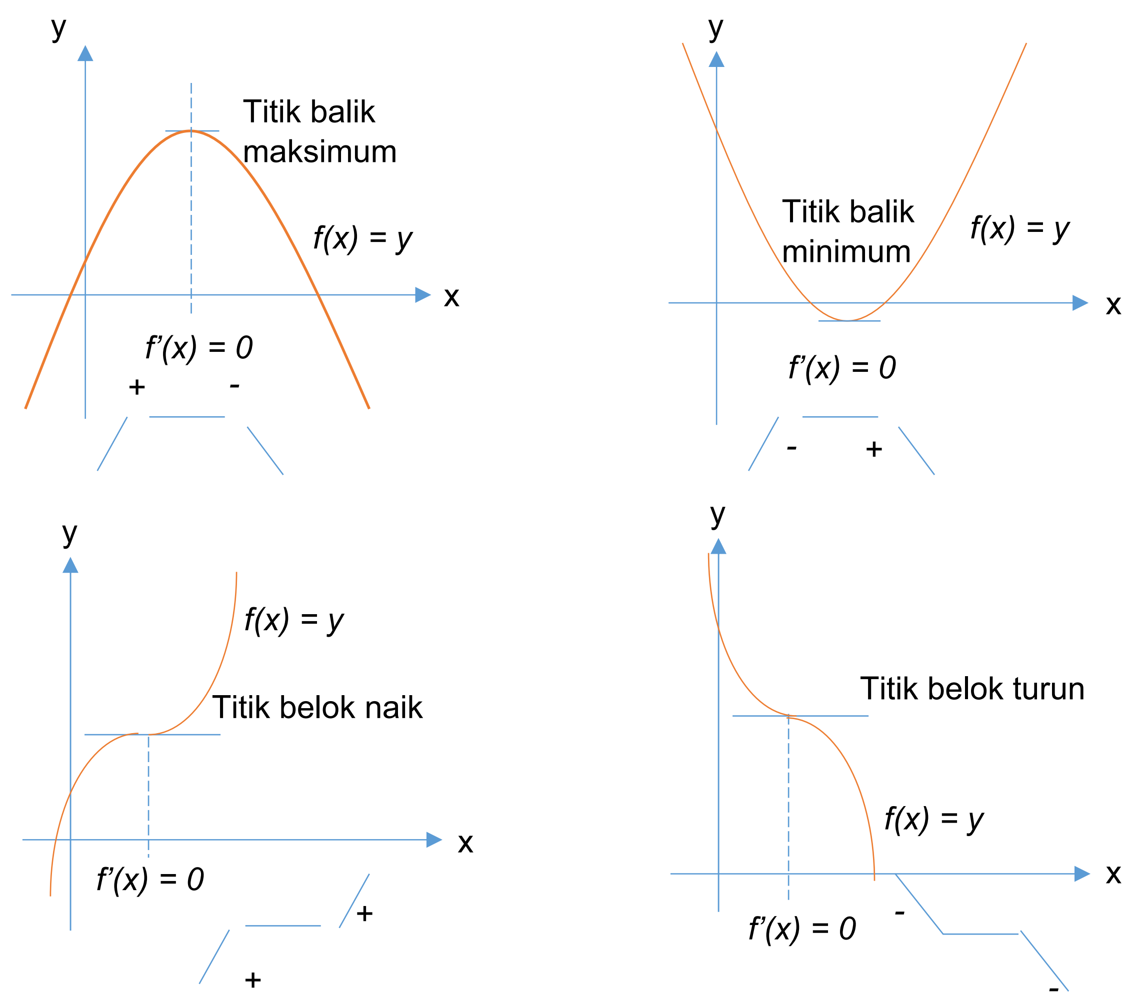
A. Titik Balik pada *Roller Coaster*



Gambar 2 Titik Balik

Saat menaiki *roller coaster* kita mengalami suatu momen di mana kita berhenti untuk bergerak baik itu naik atau pun turun. Kecepatan kita berubah dari sekian puluh km/jam tiba-tiba menghilang perlahan menjadi nol. Kemudian selang beberapa waktu kita mulai kembali bergerak kembali dengan kecepatan yang seperti pencerminan dari gerak sebelumnya. Titik itulah yang disebut dengan titik balik atau titik kritis suatu fungsi yang dalam hal ini adalah fungsi *roller coaster*. Titik balik terjadi saat gradien kurva sama dengan nol. Gradien dapat kita cari dengan mencari turunan pertama kurva. Gambar 2 di bawah ini menunjukkan adanya titik-titik balik yaitu titik B dan titik C. Titik A dan titik D bukan merupakan titik balik

Jika $f'(x) > 0$ menjadi $f'(x) < 0$, maka jenis titik balik ini adalah titik balik maksimum. Sedangkan jika $f'(x) < 0$ menjadi $f'(x) > 0$, maka jenis titik balik ini adalah titik balik minimum. Berikut adalah jenis-jenis titik balik:



Gambar 3 Jenis-Jenis Titik Balik

Ada kaitan antara tanda dari turunan kedua fungsi pada titik balik $f''(x)$ (dengan $x = c$ adalah absis titik balik) dengan jenis titik baliknya. Hal Ini dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema Nilai Balik

Misalkan $y = f(x)$ terdefinisi pada selang $a < x < b$ yang memuat c, $f'(x)$ dan $f''(x)$ ada untuk setiap titik pada selang $a < x < b$ dan misalkan juga $f'(c) = 0$, yang berarti $x = c$ adalah absis titik balik.

1. $f''(c) < 0$ maka $f(c)$ adalah nilai balik maksimum.
2. $f''(c) > 0$ maka $f(c)$ adalah nilai balik minimum.
3. $f''(c) = 0$ maka $f(c)$ adalah titik belok.

Penugasan 1.1

Tujuan: Mendata benda-benda yang menggambarkan kondisi titik balik.
Media: Lingkungan sekitar, buku dan alat tulis.
Langkah-langkah:

1. Berkelilinglah dan amatilah lingkungan di sekitarmu.
2. Catatlah setiap kondisi yang kamu amati yang menurutmu menggambarkan kondisi titik balik.
3. Bila terdapat kendala, coba konsultasikan dengan tutor.

Contoh Soal 1.1

Tentukan titik balik dan jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$, untuk $0^o \le x \le 360^o$!

Penyelesaian:

Titik balik dicapai jika turunannya adalah nol, sehingga

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow \cos x = \sin x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$ sehingga $\tan x = 1$

x yang memenuhi adalah $x = 45^o$ *atau* $x = 225^o$

Untuk $x = 45^o \Rightarrow y = \cos 45^o + \sin 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

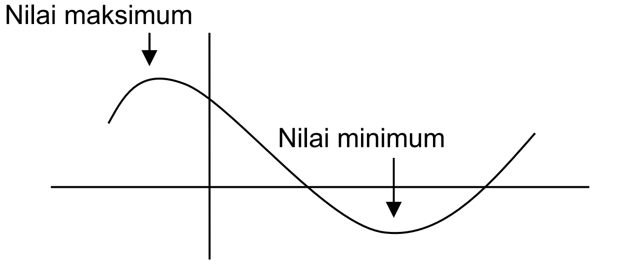
Untuk $x = 225^o \Rightarrow y = \cos 225^o + \sin 225^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

Titik balik untuk fungsi di atas adalah $(45^o, \sqrt{2})$ dan $(225^o, -\sqrt{2})$.

Jadi, titik balik dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah $(45^o, \sqrt{2})$ yang termasuk nilai balik maksimum dan $(225^o, -\sqrt{2})$ yang termasuk nilai balik minimum.

B. Nilai Maksimum dan Minimum

Nilai maksimum dari suatu fungsi adalah nilai paling besar yang memungkinkan dari suatu fungsi untuk semua daerah asal. Sementara nilai minimum adalah nilai terkecil dari suatu fungsi pada daerah domain fungsi tersebut. Nilai maksimum dan nilai minimum adalah nilai koordinat fungsi. Nilai maksimum dan minimum dapat digambarkan seperti gambar 4.



Gambar 4 Nilai Maksimum dan Nilai Minimum

Nilai maksimum dan minimum suatu fungsi sering disebut pula dengan **nilai ekstrim.** Nilai ekstrim dari fungsi $y = f(x)$ diperoleh untuk x yang memenuhi persamaan $f'(x) = 0$. Jika $x = a$ adalah nilai x yang memenuhi persamaan $f'(x) = 0$, maka $(a, f(a))$ adalah titik ekstrim fungsi $y = f(x)$. Jenis nilai ekstrim fungsi dapat ditentukan yaitu:

- Nilai ekstrim ini akan merupakan nilai maksimum jika $f'(x) = 0$ dan $f''(x) < 0$
- Nilai ekstrim ini akan merupakan nilai minimum jika $f'(x) = 0$ dan $f''(x) > 0$

Untuk kurva $y = A \sin x + B \cos x$, dengan A dan B adalah konstanta, nilai maksimum dan minimumnya dapat dinyatakan menjadi:

$$y_{maks} = \sqrt{A^2+B^2}$$
$$y_{min} = -\sqrt{A^2+B^2}$$

Bentuk jumlah yang melibatkan *sin x* dan *cos x* atau *sin px* dan *cos px* bisa diubah ke fungsi tunggal *cos x* atau *cos px*, seperti berikut.

$$y = A \sin x + B \cos x = k \cos (x - a)$$

atau

$$y = A \sin px + B \cos px = k \cos (px - a)$$

dengan $k = \sqrt{A^2+B^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{A}{B}$

Contoh Soal 1.2

Nilai maksimum dari $f(x) = 4 \cos^2 x + 14 \sin^2 x + 24 \sin x \cos x + 10$ adalah….

Penyelesaian:

Ubah ke dalam bentuk A sin x + B cos x persamaan:

$f(x) = 4 \cos^2 x + 14 \sin^2 x + 24 \sin x \cos x + 10$

$\Leftrightarrow f(x) = 4 \cos^2 x + (4 \sin^2 x + 10 \sin^2 x) + 12(2 \sin x \cos x) + 10$

$\Leftrightarrow f(x) = (4 \cos^2 x + 4 \sin^2 x) + 10 \sin^2 x + 12(\sin 2x) + 10$

$\Leftrightarrow f(x) = 4(\cos^2 x + \sin^2 x) + 10 \sin^2 x + 12 \sin 2x + 10$

$\Leftrightarrow f(x) = 4(1) + 10 \sin^2 x) + 12 \sin 2x + 10$

Ingat $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ sehingga $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

$\Leftrightarrow f(x) = 4(1) + 5(2 \sin^2 x) + 12 \sin 2x + 10$

$\Leftrightarrow f(x) = 14 + 5(1 - \cos 2x) + 12 \sin 2x$

$\Leftrightarrow f(x) = 14 + 5 - 5 \cos 2x + 12 \sin 2x$

$\Leftrightarrow f(x) = 19 - 5 \cos 2x + 12 \sin 2x$

$\Leftrightarrow f(x) = -12 \sin 2x + 5 \cos 2x = 19$

Terdapat nilai konstanta 19 sehingga nilai y_{maks} perlu ditambahkan dari nilai 19 menjadi:

$y_{maks} = 19 + \sqrt{12^2 + (-5)^2}$

$y_{maks} = 19 + \sqrt{144 + 25}$

$y_{maks} = 19 + \sqrt{169}$

$y_{maks} = 19 + 13$

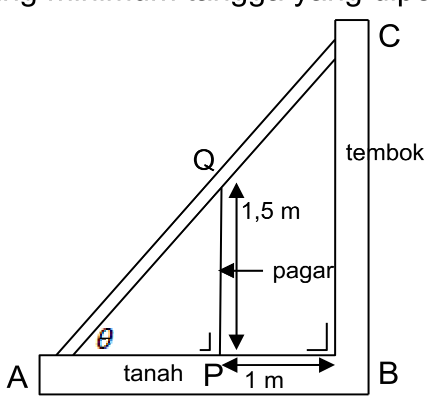
$y_{maks} = 32$

Jadi, nilai maksimum dari $f(x) = 4 \cos^2 x + 14 \sin^2 x + 24 \sin x \cos x + 10$ adalah 32.

Contoh Soal 1.3

Sebuah pagar dengan tinggi 1,5 m berada 1 m dari sebuah tembok. Terdapat tangga bertumpu pada tanah, menyentuh bagian atas pagar dan bersandar pada tembok. Tentukan panjang minimum tangga yang diperlukan agar sesuai dengan kondisi tersebut!

Penyelesaian:



Pada Δ APQ dan Δ ABC berlaku:

$\frac{PQ}{AP} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{1,5}{AP} = \frac{BC}{1 + AP}$

AP . BC = 1,5 + 1,5 AP

$BC = \frac{1,5 + 1,5\,AP}{AP}$

Pada segitiga APQ berlaku $\frac{1,5}{AP} = \tan \theta$

$BC = \frac{1,5}{AP} + 1,5$

$BC = \tan \theta + 1,5$

Pada segitiga APQ berlaku $\frac{BC}{AC} = \sin \theta$ sehingga

$$AC = \frac{BC}{\sin\theta}$$

$$AC = \frac{\tan\theta + 1{,}5}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{\tan\theta}{\sin\theta} + \frac{1{,}5}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta} + \frac{1{,}5}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1{,}5}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow AC = (\cos\theta)^{-1} + 1{,}5\,(\sin\theta)^{-1}$$

Supaya panjang tangga AC minimum terhadap sudut θ, turunannya harus sama dengan nol.

$$\Leftrightarrow -1(\cos\theta)^{-1-1} + 1{,}5(-1)(\sin\theta)^{-1-1}(\cos\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta\,(\cos\theta)^{-2} - 1{,}5\cos\theta\,(\sin\theta)^{-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{(\cos\theta)^2} = \frac{1{,}5\cos\theta}{(\sin\theta)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\sin\theta)(\sin\theta)^2 = 1{,}5\cos\theta\,(\cos\theta)^2$$

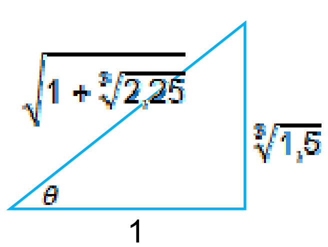
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^3 = 1{,}5$$

$$\Leftrightarrow (\tan\theta)^3 = 1{,}5$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = \sqrt[3]{1{,}5}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt[3]{1{,}5}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{2{,}25}}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{2{,}25}}}$$



panjang tangga $AC = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1{,}5}{\sin\theta}$

$$AC_{min} = \sqrt{1+\sqrt[3]{2{,}25}} + 1{,}5\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{2{,}25}}}{\sqrt[3]{1{,}5}}$$

Dengan menggunakan kalkulator saintifik dan pembulatan pada sepersepuluhan terdekat diperoleh AC_{min} = 3,5

Jadi, panjang minimum tangga yang diperlukan adalah 3,5 meter.

C. Selang Kemonotonan Kurva Fungsi Trigonometri

Dalam pembahasan kurva fungsi trigonometri kita mengenal Teorema Kemonotonan. Fungsi naik dan turun disebut dengan kemonotonan. Adapun bunyi Teorema Kemonotonan sebagai berikut:

Teorema Kemonotonan

Andaikan f kontinu pada interval I dan terdiferensiasi pada setiap titik dalam I, maka berlaku:

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam I, maka f naik pada I
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam I, maka f turun pada I

Contoh Soal 1.4

Untuk selang $-\pi \le x \le \pi$, tentukan daerah fungsi $f(x) = \sin^2 x$ naik!

Penyelesaian:

Karena fungsi f naik, berarti $f'(x) > 0$

$2(\sin x)^{2-1}(\cos x) > 0$

$2(\sin x)(\cos x) > 0$

$\sin 2x > 0$

Untuk titik nol (titik batas),

$\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \sin 0$

$2x = 0 + k.2\pi$ atau $2x = (\pi - 0) + k.2\pi$

$x = k.\pi$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k.\pi$

Untuk $k = -1 \rightarrow x = -\pi$ $\quad k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

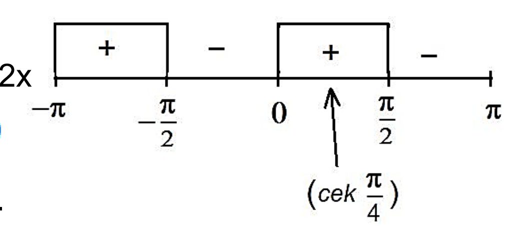
Untuk $k = 0 \rightarrow x = 0$ $\quad k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Untuk $k = 1 \rightarrow x = \pi$

Misal kita ambil $x = \frac{\pi}{4}$

Lalu kita masukkan ke fungsi $f'(x) = \sin 2x$

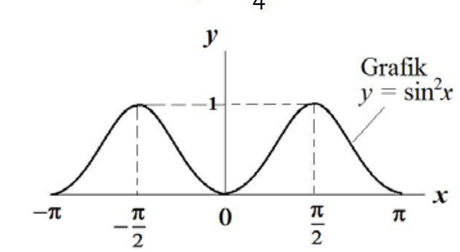
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$ (positif)



Daerah antara 0 dan $\frac{\pi}{2}$ bertanda positif.

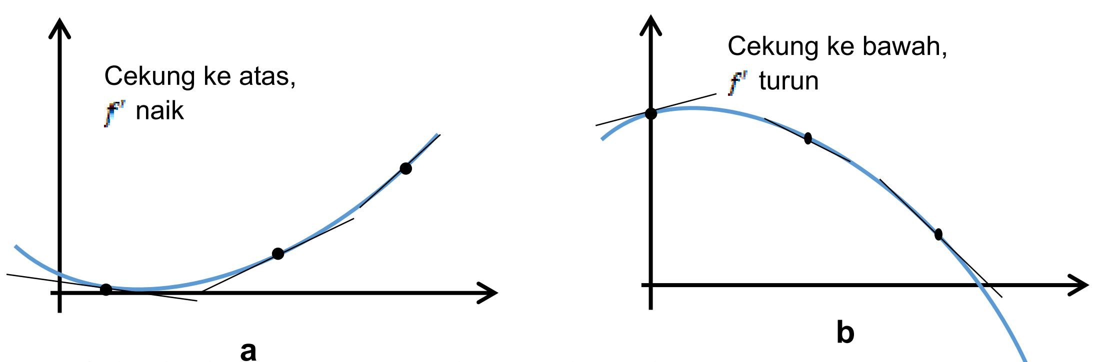
Fungsi f naik pada daerah f nya yang positif.

Jadi, fungsi f naik pada daerah $-\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}$ dan daerah $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.



D. Selang Kecekungan Kurva Fungsi Trigonometri

Karakteristik suatu fungsi yang naik atau turun dapat kita gunakan untuk mendeskripsikan grafik fungsi tersebut. Kita dapat menentukan di mana grafik fungsi *f* akan cekung ke atas atau cekung ke bawah. Misalkan *f* terdiferensialkan pada selang buka *I*. Grafik *f* akan **cekung ke atas** pada *I* jika *f'* naik pada selang tersebut dan akan **cekung ke bawah** pada *I* jika *f'* turun pada selang tersebut. Misalkan *f* terdiferensialkan pada selang buka *I*. Jika grafik *f* cekung ke atas pada *I*, maka grafik *f* berada di atas semua garis singgungnya pada selang tersebut. (Lihat gambar 5 a)) Misalkan *f* terdiferensialkan pada selang buka *I*. Jika grafik *f* cekung ke bawah pada *I*, maka grafik *f* berada di bawah semua garis singgungnya pada selang tersebut. (lihat gambar 5 b))



Gambar 5 a) Grafik *f* Terletak di Atas Semua Garis Singgungnya, dan

b) Grafik *f* Terletak di Bawah Semua Garis Singgungnya

Teorema Kecekungan

Andaikan *f* terdiferensiasi dua kali pada interval terbuka *I*, maka berlaku:
1. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua *x* dalam *I*, maka *f* cekung ke atas pada *I*
2. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua *x* dalam *I*, maka *f* cekung ke bawah pada *I*

Untuk menerapkan teorema kecekungan, tentukan lokasi nilai-nilai x sedemikian sehingga $f''(x) = 0$. Gunakan nilai-nilai x tersebut untuk menentukan selang uji. Kemudian, ujilah tanda $f''(x)$ pada masing-masing selang uji.

Contoh Soal 1.5

Untuk selang $[0, \frac{\pi}{2}]$ tentukan interval di mana fungsi $f(x) = \sqrt{\cos x}$ cekung ke bawah!

Penyelesaian:

$f''(x) < 0$ agar fungsi cekung ke bawah

$f(x) = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x)^{\frac{1}{2}-1}.(-\sin x)$

$= \frac{1}{2}(\cos x)^{\frac{1}{2}}.(-\sin x)$

$= \dfrac{-\sin x}{2(\cos x)^{\frac{1}{2}}}$

$U = -\sin x$

$U' = -\cos x$

$V = 2(\cos x)^{\frac{1}{2}}$

$V' = 2.\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}(-\sin x) = \dfrac{-\sin x}{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}$

$f''(x) = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$

$$= \frac{-\cos x . 2(\cos x)^{\frac{1}{2}} - (-\sin x).\dfrac{-\sin x}{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}}{\left(2(\cos x)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{-2\cos x\sqrt{\cos x} - \dfrac{(\sin^2 x)}{\sqrt{\cos x}}}{4\cos x} \times \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}}$$

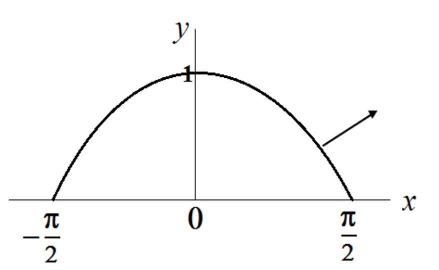
$$= \frac{2\cos^2 x \quad \sin^2 x}{4\cos x\sqrt{\cos x}}$$

Untuk selang $[0, \frac{\pi}{2}]$ (yaitu $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$) nilai cos x dan sin x selalu positif, sehingga

bentuk $f''(x) = \dfrac{-2\cos^2 x - \sin^2 x}{4\cos x\sqrt{\cos x}} = -\dfrac{-}{+} = -$ (negatif).

Dengan demikian, pada selang

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \left\{x \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, x \in R\right\}$



Jadi, interval saat $f(x) = \sqrt{\cos x}$ cekung ke bawah

adalah $\left\{x \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, x \in R\right\}$.

Latihan Soal 1

1. Tentukan titik balik dan jenisnya dari fungsi: $f(x) = \sin x - \cos x$, untuk $0^o \le x \le 360^o$!
2. Tentukan nilai minimum fungsi $f(x) = 4 \sin x + \cos 4x$ pada interval $0 \le x \le 180^0$!
3. Tentukan nilai maksimum θ dari k di mana $\frac{5 - \sin 2\theta}{\sin \theta} \ge 3k$ pada interval $0 \le x \le 180^0$!
4. Untuk selang $-\pi \le x \le \pi$, tentukan daerah fungsi $f(x) = \cos^2 x$ naik!
5. Untuk selang $[0, \pi]$, tentukan interval di mana fungsi $f(x) = \sqrt{\sin x}$ cekung bawah!

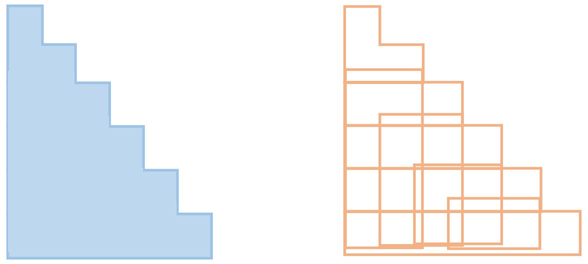
UNIT 2. *MOTOCROSS*

Sumber: *https://img.allw.mn/content/travel/2012/07/41.jpg/*
Gambar 6 Gambar Motocross

Pernahkah Anda melihat kejuaraan *motocross*? Atau mungkin Anda memiliki *motocross* di rumah? Seru bukan? Ya, pasti sangat seru. Dalam olahraga *motocross* kita biasanya disuguhi dengan pendaratan yang sangat memukau. Kemiringan saat mengendarai motor sangat penting sekali. Pengendara tidak boleh salah memperkirakan kapan akan mendarat. Salah sedikit saja tentunya akan berakibat fatal untuk pembalap.

A. Gradien Suatu Kurva

Sebagian besar dari kita pasti telah berkali-kali naik-turun tangga. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 7 Perbandingan Dua Buah Tangga

Tinggi kedua tangga tersebut sama. Apabila kita menaiki tangga biru kita akan merasa lebih lelah daripada saat kita menaiki tangga orange. Saat menaiki tangga biru kita mengangkat kaki kita lebih tinggi dari pada saat menaiki tangga orange dengan cepat sehingga kita merasa lebih cepat lelah. Sedangkan bila kita menaiki tangga orange kita tidak terlalu lelah dibandingkan saat kita menaiki tangga biru. Kemiringan adalah hal yang membedakannya. Tangga biru memiliki kemiringan yang lebih besar (lebih tegak) daripada tangga orange.

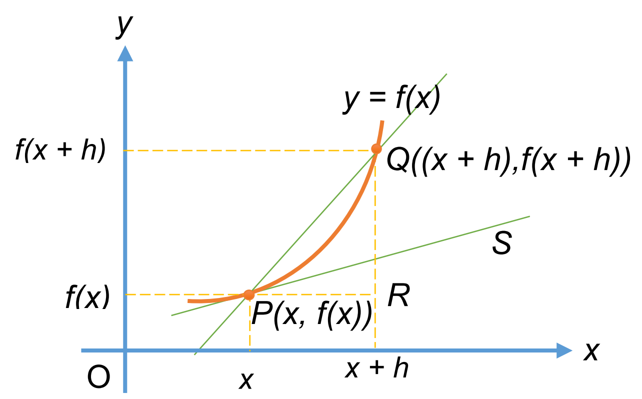
Penugasan 2.1

Tujuan: Mendata benda-benda yang memiliki tingkat kemiringan yang mencolok.
Media: Lingkungan sekitar, buku dan alat tulis.
Langkah-langkah:

1. Berkelilinglah dan amatilah lingkungan di sekitarmu.
2. Catatlah setiap semua benda yang menurutmu memiliki tingkat kemiringan yang mencolok.
3. Bila terdapat kendala, coba konsultasikan dengan tutor.

Kita menyebut tingkat kemiringan ruas garis ataupun garis sebagai **gradien**. Untuk lebih jelas, anda dapat perhatikan Gambar 8.

Titik P*(x, y)* adalah sembarang titik pada kurva *y = f(x)*. Sehingga koordinat titik P dapat dituliskan sebagai *(x, f(x))*. Absis titik Q adalah *(x + h)* sehingga koordinat titik Q adalah *{(x + h), (f(x + h))}*. Jika h $\to 0$, maka S akan menjadi garis singgung pada kurva di titik P. Dengan demikian gradien garis singgung pada kurva di titik P adalah sebagai berikut:



Gambar 8 Kurva dengan persamaan *y = f(x)*

$$m = \tan QPR = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Artinya gradien garis singgung di titik $A\ (a, f(a))$ adalah $m = f'(a)$
Langkah-langkah menentukan gradien di titik $A\ (a, f(a))$ pada kurva *y = f(x)*:

1) Tentukan turunan fungsinya $(f'(x))$
2) Subtitusi nilai $x = a$ atau absis titik $A\ (a,\ f(a))$
3) Gradiennya (m) adalah $m = f'(a)$

Contoh Soal 2.1

Gradien kurva $y = \sin x + 3\cos x$ pada $x = \frac{\pi}{4}$ adalah…

Penyelesaian:

m = y' = cos x – 3 sin x

untuk $x = \frac{\pi}{4}$,

$m = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$m = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$m = -\sqrt{2}$

Jadi, gradien kurva $y = \sin x + 3\cos x$ pada $x = \frac{\pi}{4}$ adalah $-\sqrt{2}$.

Contoh Soal 2.2

Gradien dari persamaan kurva y = 2 sin x – cos x di titik berabsis 30^0 adalah…

Penyelesaian:

Gradien diperoleh melalui turunan pertama kurva yaitu $m = y' = 2\cos x + \sin x$

Untuk $x = 30^0$

$m = 2\cos 30^0 + \sin 30^0$

$m = 2 . \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}$

$m = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$

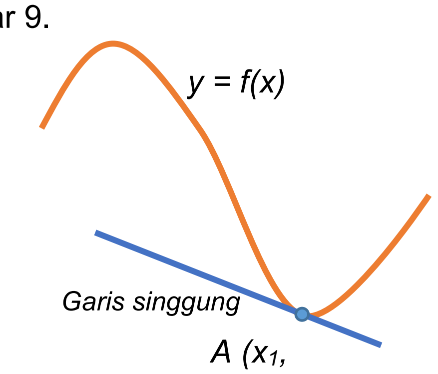
Jadi, gradien kurva y = 2 sin x – cos x di titik berabsis 30^0 adalah $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$.

B. Persamaan Garis Singgung Kurva

Secara umum persamaan garis di titik $A(x_1, y_1)$ pada kurva $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan rumus:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan gradiennya $m = f'(x_1)$. Hubungan garis singgung kurva dan kurvanya dapat digambarkan seperti Gambar 9.



Gambar 9 Garis Singgung Kurva

Dalam menyusun persamaan garis singgung pada kurva, yang dibutuhkan adalah titik singgung dan gradiennya. Jika diketahui gradiennya, maka kita tinggal mencari titik singgungnya dengan menggunakan hubungan $m = f'(x)$. Terkadang kita harus mencari terlebih dahulu hubungan suatu garis dengan garis lainnya yaitu sejajar atau tegak lurus melalui gradien yang telah diketahui.

Persamaan garis singgung suatu kurva *f(x)* pada sembarang titik dapat dibentuk dengan turunan.

Pada garis $ax + by + c = 0$ dengan kemiringan α, nilai gradien:

$$m = \frac{a}{b} = \tan \alpha$$

Gradien dua garis sejajar yaitu $m_1 = m_2$

Gradien dua garis tegak lurus yaitu $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Membentuk persamaan garis singgung $y - y_1 = m(x - x_1)$

Contoh Soal 2.3

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal terhadap kurva $y = x^2 - 3x + 5$ di titik (1, 3)!

Penyelesaian:

Pertama, kita tentukan dahulu gradien kurva di titik (1, 3)

$y = x^2 - 3x + 5$

$m = \frac{dy}{dx} = 2x - 3$

Melalui (1, 3) maka $m = 2(1) - 3 = -1$

Persamaan garis singgung adalah persamaan garis melalui titik (1, 3) dengan gradien m = -1, yaitu

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = -1(x - 1)$

$y - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 4$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung, sehingga

$m = \frac{-1}{m_{garis\ singgung}} = \frac{-1}{-1}$

Dengan demikian, persamaan garis normal melalui (1, 3) adalah

$y - y_1 = m_{normal}(x - x_1)$

$y - 3 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x + 2$

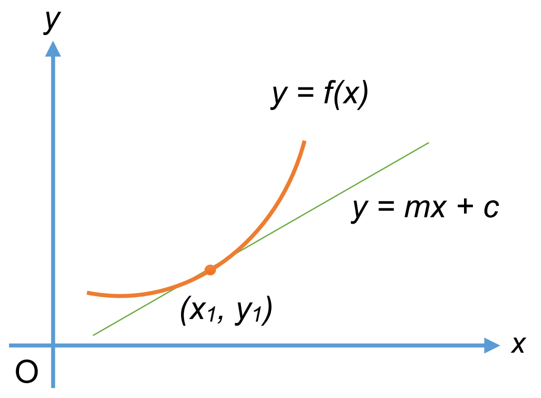
Jadi, persamaan garis normal melalui (1, 3) adalah *y = x + 2*.

Contoh Soal 2.4

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 2\sin(x + \pi)$ di titik berabsis $\frac{\pi}{3}$!

Penyelesaian:

Pada saat kurvanya y = f(x) = 2 sin (x + π) dan $x_1 = \frac{\pi}{3}$ gradien garis singgungnya adalah:



$m = f'(x)$

$= -2\cos x$

$= -2\cos \frac{\pi}{3}$

$= -2\cos 60^0$

$= -2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= -\sqrt{3}$

Maka persamaan garis singgungnya berbentuk:

$y = -\sqrt{3}x + c$

karena $x_1 = \frac{\pi}{3}$ sehingga $y_1 = 2\sin(x_1 + \pi)$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$

$= 2\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$

$= 2\sin 240^0$

$= 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

Diperoleh titik (x_1, y_1) yaitu $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$. Masukkan titik tersebut ke persamaan (1)

$\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{3} + c \longrightarrow c = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

Sehingga $y = -\sqrt{3}x + c \longrightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = 2\sin(x + \pi)$, di titik berabsis $\frac{\pi}{3}$ adalah

$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

Latihan Soal 2

1. Tentukan gradien kurva y = 2 sin x + cos x pada $x = \frac{\pi}{2}$!
2. Tentukan gradien dari persamaan kurva y = $\frac{1}{\sec x}$ + cosec x di titik berabsis 30^0!
3. Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal terhadap kurva
   $y = 2x^2 + x - 6$ di titik (2,2)!
4. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 2\sin(2x + \pi)$ di titik berabsis $\frac{\pi}{2}$!

RANGKUMAN

1. Titik balik terjadi jika dipenuhi $f'(x) = 0$, yaitu titik dimana gradien kurva sama dengan nol.
   Metode 1: Uji turunan pertama pada kedua sisi di sebelah titik balik.
   a. Jika dari sisi sebelah kiri titik balik menuju ke sisi sebelah kanannya terjadi perubahan tanda gradien:
      - Dari $f'(x) > 0$ menjadi $f'(x) < 0$, maka jenis titik baliknya adalah titik balik maksimum.
      - Dari $f'(x) < 0$, menjadi $f'(x) > 0$, maka jenis titik baliknya adalah titik balik minimum.

   b. Jika dari sisi sebelah kiri titik balik menuju ke sisi sebelah kanannya tidak terjadi perubahan tanda gradien:
      - Keduanya $f'(x) > 0$ atau keduanya $f'(x) < 0$, maka jenis titik baliknya adalah titik belok.
2. Teorema nilai balik
   Misalkan $y = f(x)$ terdefinisi pada selang a < x < b yang memuat c, dan $f'(x)$ dan $f''(x)$ ada untuk setiap titik pada selang a < x < b, misalkan juga $f'(c) = 0$, yang berarti $x = c$ adalah absis titik balik, dan berlaku:
   a. Jika $f''(c) < 0$ atau negatif, maka $f(c)$ adalah nilai balik maksimum.
   b. Jika $f''(c) > 0$ atau positif, maka $f(c)$ adalah nilai balik minimum.
3. Nilai ekstrim $y = A \sin X + B \cos x$, dengan A dan B adalah konstanta, maka berlaku:
   a. Nilai maksimum: $y_{maks} = \sqrt{A^2+B^2}$
   b. Nilai minimum: $y_{maks} = -\sqrt{A^2+B^2}$
4. Fungsi $f(x)$ naik pada selang I jika $f'(x) > 0$ dan turun jika $f'(x) < 0$.
5. Bila $f''(x) > 0$, $x \subset I$, maka $f(x)$ cekung ke atas pada I, dan bila $f''(x) < 0$, $x \subset I$ maka $f(x)$ cekung ke bawah pada I.
6. Gradien pada kurva $y = f(x)$ di titik (x_1, y_1) dapat dinyatakan dengan,
   $$m = \frac{df(x)}{dx}(x = x_1) = \frac{dy}{dx}(x = x_1) \text{ atau } m = f'(x)$$
7. Persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) dengan gradien m adalah
   $(y - y_1) = m(x - x_1)$
8. Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung, dengan memiliki gradien normal,
   $$m_{normal} = \frac{-1}{m_{garis\ singgung}}$$

PENILAIAN AKHIR MODUL 13

A. Pilihlah satu jawaban yang benar dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e!

1. Nilai maksimum θ dari k dimana $\frac{5-\cos 2\theta}{\sin\theta} \geq 2k$ dan $0 < \theta < \pi$ adalah… (SIMAK UI 2012)
   a. 3 c. 4 e. 7
   b. 5 d. 6
2. Nilai minimum fungsi $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah…
   (UM-UGM 2015 Matematika IPA)
   a. -4 c. -2 e. 0
   b. -3 d. -1
3. Fungsi $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + \sqrt{\frac{x}{2}}}$, $x > 0$ turun pada interval…
   a. $\frac{5\pi}{12} < x \leq \frac{13\pi}{12}$ c. $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ e. $\frac{7\pi}{6} < x \leq \frac{11\pi}{6}$
   b. $\frac{7\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}$ d. $\frac{7\pi}{6} < x \leq \frac{13\pi}{6}$
4. $f(x) = 2\sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$ meningkat untuk semua $x \in R$ jika…
   a. $a < 0$ c. $0 < a < 1$ e. a > 1
   b. $a > 0$ d. a = 1
5. Pada kurva $y = \sin x$ dibuat garis singgung di titik $\left(\frac{2\pi}{3}, k\right)$. Garis ini memotong sumbu x di A dan sumbu y di B. Luas segitiga AOB adalah…(Soal SIMAK UI)
   a. $\frac{(3\pi+2\sqrt{3})^2}{36}$ c. $\frac{(2\pi+3\sqrt{3})^2}{16}$ e. $\frac{(2\pi+3\sqrt{3})^2}{18}$
   b. $\frac{(2\pi+3\sqrt{3})^2}{36}$ d. $\frac{(2\pi+2\sqrt{3})^2}{36}$

6. Titik maksimum dari fungsi $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$ adalah…
   a. $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ c. $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$ e. $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$
   b. $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ d. $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$
7. Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, maka *f* akan turun pada…
   a. (1, 2) c. (1,-2) e. (-1, $\frac{1}{2}$)
   b. (-1, 2) d. (-1,-2)
8. Nilai Balik maksimum untuk fungsi $f(x) = \sin 2x,\ 0 \le x \le \pi$ adalah…
   a. -1 c. -2 e. -3
   b. 1 d. 2
9. Nilai maksimum fungsi $f(x) = 4\cos^2 x + 14\sin^2 x + 24\sin x \cdot \cos x + 10$ adalah…
   a. 30 c. 32 e. 34
   b. 31 d. 33
10. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = 3\cos x + 4\sin x$ adalah…
    a. -1 c. -3 e. -5
    b. -2 d. -4

B. Selesaikanlah soal-soal di bawah ini dengan tepat!

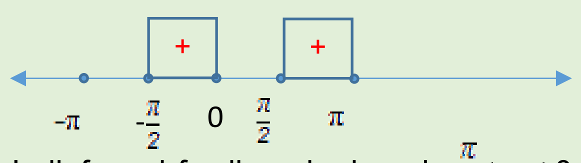
1. Pada selang (-270°, 90°) tentukan kapan fungsi $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ cekung ke atas dan cekung ke bawah? Tentukan pula titik beloknya!
2. Sebuah kertas karton berbentuk lingkaran dengan jari-jari 8 cm, dipotong sebuah sektor dengan sudut pusat θ. Dengan kertas karton yang telah terpotong ini dibuat selimut kerucut. Tentukan sudut θ agar volume kerucut yang terbentuk sebesar-besarnya!
3. Sebuah kurva dengan persamaan $3xy + y = x + 6 = 0$ memotong sumbu x disebuah titik A. tentukan sudut yang dibentuk oleh garis singgung di A terhadap sumbu x positif!
4. Sebuah kurva didefinisikan dengan persamaan parameter $x = \cos 2\theta + 2\cos\theta,\ y = \sin 2\theta - 2\sin\theta$ Tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx} = \tan\frac{\theta}{2}$!
5. Sebuah tangga panjangnya 8 meter bersandar pada dinding tegak yang tingginya 6 meter dengan bagian atas tangga melewati dinding. Jika ujung bawahnya ditarik horizontal dengan kecepatan 2 meter/detik menjauhi dinding, tentukan kecepatan vertikal ujung atas tangga pada saat tangga membentuk sudut 60° dengan permukaan lantai!

KUNCI JAWABAN DAN PENSKORAN

Kunci Jawaban Latihan Soal 1

No.	Deskripsi Jawaban	Skor
1	Titik balik dicapai jika turunannya adalah nol, sehingga $f'(x) = \sin x - \cos x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x - \cos x = 0$ $\Rightarrow \sin x = \cos x$ $\frac{\sin x}{\cos x} = 1$ sehingga $\tan x = 1$ *x* yang memenuhi adalah $x = 45^{o}$ atau $x = 225^{o}$ Untuk $x = 45^{o} \Rightarrow y = \sin 45^{o} + \cos 45^{o}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $= \sqrt{2}$ Untuk $x = 225^{o} \Rightarrow y = \sin 225^{o} + \cos 225^{o}$ $= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $= -\sqrt{2}$ Titik balik untuk fungsi di atas adalah (45°, $\sqrt{2}$) dan (225°, -$\sqrt{2}$). Jadi, titik balik dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah (45°, $\sqrt{2}$) yang termasuk nilai balik maksimum dan (225°, -$\sqrt{2}$) yang termasuk nilai balik minimum.	1 1 1 2 2 1 1 1 1 1 1 2 2
2	Titik balik dicapai jika turunannya adalah nol, sehingga $f(x) = 4\sin x + \cos 4x,\ 0 \le x \le 180^0$ $f'(x) = 4\cos x + (-4\sin 4x) = 0$ $f'(x) = 4\cos x - 4\sin 4x = 0$ $f'(x) = 4(\cos x - \sin 4x) = 0$ $\cos x - \sin 4x = 0$ $\cos x = \sin 4x$ $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$ karena $\sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$ $x = \left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + n.2\pi$ dan $x = -\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + n.2\pi$ $5x = \left(\frac{\pi}{2}\right) + n.2\pi$ $-3x = \left(-\frac{\pi}{2}\right) + n.2\pi$ $x = \left(\frac{\pi}{10}\right) + \frac{n}{5}.2\pi$ $x = \left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{n}{3}.2\pi$ karena n bilangan bulat	1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2

	$n = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{\pi}{10}\right) + \frac{0}{5}.2\pi = \frac{\pi}{10}$ $\quad x = \left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{0}{3}.2\pi = \frac{\pi}{6}$ $n = 1 \Rightarrow x = \left(\frac{\pi}{10}\right) + \frac{1}{5}.2\pi = \frac{\pi}{2}$ $\quad x = \left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3}.2\pi = \frac{5\pi}{6}$ TM $n = 2 \Rightarrow x = \left(\frac{\pi}{10}\right) + \frac{2}{5}.2\pi = \frac{9\pi}{10}$ TM $\quad x = \left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3}.2\pi = \frac{3\pi}{2}$ TM Nilai balik minimum terjadi bila $f''(c) > 0$. $f(x) = 4 \sin x + \cos 4x$ $f'(x) = 4 \cos x - 4 \sin 4x$ $f''(x) = -4 \sin x - 16 \cos 4x$ $f''(\frac{\pi}{10}) = -4 \sin \frac{\pi}{10} - 16 \cos 4\frac{\pi}{10}$ $= -1{,}24 - 15{,}22$ $= -16{,}46 < 0$ *maksimum* $f''(\frac{\pi}{6}) = -4 \sin \frac{\pi}{6} - 16 \cos 4\frac{\pi}{6}$ $= -2 + 8$ $= 6 > 0$ *minimum* $f''(\frac{\pi}{2}) = -4 \sin \frac{\pi}{2} - 16 \cos 4\frac{\pi}{2}$ $= -4 - 16$ $= -20 < 0$ *maksimum* Nilai minimum $f(x) = 4 \sin x + \cos 4x$ pada interval $0 \leq x \leq 180^0$ adalah $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = 4 \sin \frac{\pi}{6} + \cos 4\frac{\pi}{6}$ $= 2 + (-\frac{1}{2})$ $= \frac{3}{2}$ $x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 \sin 0 + \cos 0$ $= 0 + 1$ $= 1$ $x = 180^0 \Rightarrow f(180^0) = 4 \sin 180^0 + \cos 4(180^0)$ $= 0 + 1$ $= 1$ Jika ketiganya dibandingkan, maka nilai paling kecil adalah 1. Jadi, nilai minimum mutlak dari $y = 4 \sin x + \cos 4x$ adalah 1 yang terjadi ketika $x = 0^0$ dan $x = 180^0$.	2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
3	$\frac{5 - \sin 2\theta}{\sin \theta} \geq 3k$ berarti $3k \leq \frac{5 - \sin 2\theta}{\sin \theta}$.	
	Ambil $y = \frac{5 - \sin 4\theta}{\sin \theta}$, $0 \leq x \leq 180^0$ sehingga $3k \leq y$. Syarat nilai ekstrim adalah $y' = 0$. $y = \frac{5 - \sin 4\theta}{\sin \theta} = \frac{U}{V}$ gunakan aturan pembagian $U = 5 - \sin 4\theta \Rightarrow U' = 0 - 4 \cos 4\theta = -4 \cos 4\theta$ $V = \sin \theta \Rightarrow V' = \cos \theta$ $y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = 0$ Cukup pembilangnya saja sehingga $-4 \cos 4\theta . \sin \theta - (5 - \sin 4\theta) \cos \theta = 0$ $-\cos \theta (\sin \theta - (5 - \sin \theta)) = 0$ kemungkinan I $\cos \theta = 0$ $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + n.2\pi$ $\quad$ dan $\theta = -\frac{\pi}{2} + n.2\pi$ $\Rightarrow n = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 0(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \theta = -\frac{\pi}{2} + 0(2\pi) = -\frac{\pi}{2}$ TM $\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 1(2\pi) = \frac{5\pi}{2}$ TM $\quad \theta = -\frac{\pi}{2} + 1(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$ TM kemungkinan II $\sin \theta - (5 - \sin \theta) = 0$ $\sin \theta - 5 + \sin \theta = 0$ $2 \sin \theta = 5$ TM karena nilai sin tidak lebih dari 1. $y_{maks} = \frac{5 - \sin 4\theta}{\sin \theta}$ $= \frac{5 - \sin 4\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}}$ $= \frac{5 - 0}{1}$ $= 5$ $3k \leq 5$ $k \leq \frac{5}{3}$ Jadi, nilai maksimum dari k adalah $\frac{5}{3}$.	2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
4	Karena fungsi $f(x) = \cos^2 x$ naik, berarti $f'(x) > 0$, $2(\cos x)^{2-1} (-\sin x) > 0$ $2(\cos x)(-\sin x) > 0$ $-\sin 2x = 0$	1 1 1 1

	Untuk titik nol (titik batas), -sin 2*x* = sin 0 -2x = 0 + k.2π atau -2x = (π - 0) + k.2π $x = -k.\pi$ $x = -\frac{\pi}{2} - k.\pi$ Untuk $k = -1 \rightarrow x = \pi$ $k = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ Untuk $k = 0 \rightarrow x = 0$ $k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ Untuk $k = 1 \rightarrow x = -\pi$ Misal kita ambil x = $\frac{\pi}{4}$ Lalu kita masukkan ke fungsi f'(x) = -sin 2x $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ (negatif) Daerah antara 0 dan $\frac{\pi}{2}$ bertanda negatif Fungsi *f* naik pada daerah *f* nya yang positif.  Jadi, fungsi *f* naik pada daerah $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ dan daerah $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.	1 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 2 1
5	*f'' (x) < 0* agar fungsi cekung ke bawah $f(x) = \sqrt{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^{\frac{1}{2}-1}.(\cos x)$ $= \frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}.(\cos x)$ $= \frac{\cos x}{2(\sin x)^{\frac{1}{2}}}$ *U = cos x* *U' = -sin x* $V = 2(\sin x)^{\frac{1}{2}}$ $V' = 2.\frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}(\cos x) = \frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}$ $f''(x) = \frac{U'V - UV'}{V^2}$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2

	$= \frac{\cos x.\ 2(\sin x)^{\frac{1}{2}} - (\cos x).\ \frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}}{\left(2(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$ $= \frac{2\cos x\sqrt{\sin x} - \frac{(\cos^2 x)}{\sqrt{\sin x}}}{4\sin x} \times \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}}$ $= \frac{2\cos x.\ \sin x - \cos^2 x}{4\sin x\sqrt{\sin x}}$ Untuk selang $[0, \frac{\pi}{2}]$ (yaitu $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) nilai cos x dan sin x selalu positif, sehingga bentuk *f'' (x)* = $\frac{2\cos x.\ \sin x - \cos^2 x}{4\sin x\sqrt{\sin x}} = -\frac{+}{+} = +$ (positif). Jadi, *f(x)* = $\sqrt{\sin x}$ cekung ke atas pada $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x \in R\right\}$.	1 1 1 1 1
	Jumlah skor	**130**

Nilai = $\frac{\text{Skor Yang Diperoleh}}{130}$ **x 100**

Kunci Jawaban Latihan Soal 2

No.	Deskripsi Jawaban	Skor
1	Untuk mencari gradien kurva y = 2 sin x + cos x dapat dicari melalui turunan pertamanya: m = y' = -2 cos x + sin x Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, berarti $m = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ m = -2 (0) + 1 m = 1 Jadi, gradien kurva y = sin x + 3 cos x pada $x = \frac{\pi}{2}$ adalah 1.	1 1 1 1 1 1
2	Untuk mencari gradien kurva y = $\frac{1}{\sec x}$ + cosec x dapat dicari melalui turunan pertamanya: m = y' = -sin x - cot x . cosec x Untuk x = 30^0	1 1

	m = -sin 30^0 - cot 30^0 . cosec 30^0	1
	$m = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$	1
	$m = -\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1 \cdot \frac{2}{1}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}}$	1
	$m = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{3}} \cdot 1 \cdot \frac{2}{1}$	1
	$m = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1}} \cdot 1 \cdot \frac{2}{1}$	1
	$m = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} . 2$	1
	$m = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$	1
	Jadi, gradien kurva $y = \frac{1}{\sec x}$ + cosec x pada $x = \frac{\pi}{2}$ adalah $-\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$.	1
3	Pertama, kita tentukan dahulu gradien kurva di titik (2, 2)	
	$y = 2x^2 + x - 6$ di titik (2, 2) melalui turunan pertamanya	1
	$m = \frac{dy}{dx} = 4x + 1$	1
	Melalui (2, 2) maka m = 4(2) + 1 = 9	1
	Persamaan garis singgung melalui titik (2, 2) dengan gradien m = 9, yaitu:	
	y – 2 = 9 (x – 2)	1
	y – 2 = 9x - 18	1
	y = 9x -16	1
	Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung, sehingga	
	$m = \frac{-1}{m_{garis\ singgung}} = \frac{-1}{9}$	1
	Dengan demikian, persamaan garis normal melalui (2, 2) adalah:	
	$y - 2 = \frac{-1}{9}(x - 2)$	1
	$y - 2 = \frac{-1}{9}x + \frac{2}{9}$	1
	Jadi, persamaan garis normal melalui (2, 2) adalah $y - 2 = \frac{-1}{9}x + \frac{2}{9}$.	1

4	Kurva y = f(x) = 2 sin (2x + π) dan $x_1 = \frac{\pi}{2}$ gradien garis singgungnya adalah:	
	$m = f'(x_1)$	1
	$= -4 \cos (2x)$	1
	$= -4 \cos (2 \cdot \frac{\pi}{2})$	1
	$= -4 \cos (\pi)$	1
	$= -4 \cos (180^0)$	1
	$= -4 (-1) = 4$	1
	Dengan gradien = 4 diperoleh persamaan garis singgungnya:	
	$y = 4x + c$	1
	Untuk $x_1 = \frac{\pi}{2}$ sehingga $y_1 = 2 \sin(x_1 + \pi)$	1
	$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$	1
	$= 2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$	1
	$= 2 \sin 270^0$	1
	$= 2 (-1)$	1
	$= -2$	1
	Diperoleh titik (x_1, y_1) yaitu $(\frac{\pi}{2}, -2)$.	1
	$2 = 4\frac{\pi}{2} + c \rightarrow c = 2 - 2\pi$	2
	Sehingga $y = 4x + c \rightarrow y = 4x + 2 - 2\pi$.	1
	Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = 2\sin(2x + \pi)$, di titik berabsis $\frac{\pi}{2}$ adalah $y = 4x + 2 - 2\pi$.	1
	Jumlah skor	**44**

Nilai = $\frac{\textbf{Skor Yang Diperoleh}}{\textbf{44}}$ **x 100**

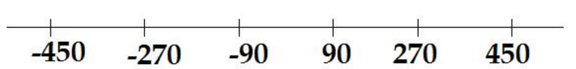
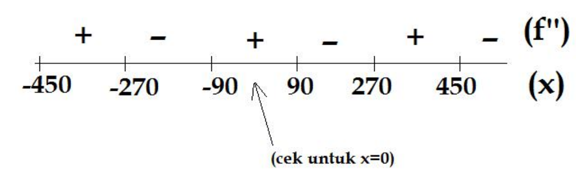
Kunci Jawaban Penilaian Akhir Modul 13

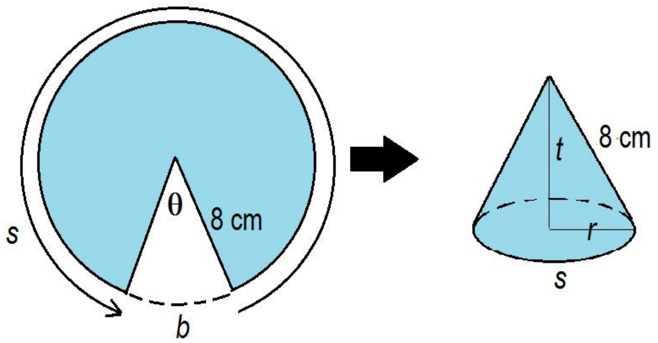
A. Pilihan Ganda

Nomor Soal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kunci Jawaban	A	B	B	E	B	A	B	B	C	B
Skor	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Nilai A = $\frac{\textbf{skor yang diperoleh}}{\textbf{10}}$ **x 100**

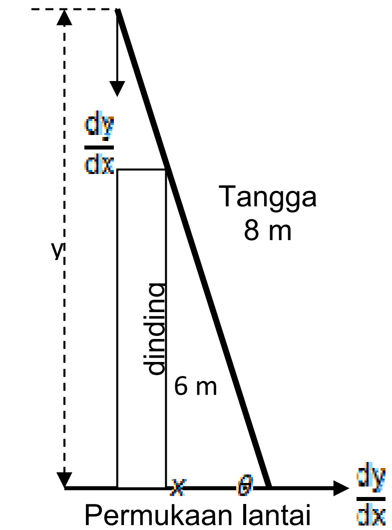
B. Esai

Kunci Jawaban	Skor
1. Untuk menentukan cekung ke atas, cekung ke bawah, atau titik belok, kita lihat dari turunan kedua f(x).	
$f(x)=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$	1
$f'(x)=\dfrac{(\sin x)+1}{\sin^2 x}$	1
maka turunan keduanya:	
$f''(x)=\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$	1
$=\dfrac{(\cos x)\cos^2 x-((\sin x)+1)\,2\,.\cos x\,(-\sin x)}{(\cos^2 x)^2}$	1
$=\dfrac{\cos^3 x+2\cos x\,\sin^2 x+2\cos x\,.\sin x}{\cos^4 x}$	1
$=\dfrac{(1+\sin^2 x+2\sin x)}{\cos^3 x}=\dfrac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$	1
Bagian pembilang $(1+\sin x)^2$ selalu positif atau nol.	
Maka positif-negatif $f''(x)=\dfrac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$ sekarang tergantung pada positif-negatif bagian penyebutnya yaitu $\cos^3 x$.	1
Untuk titik batas, $\cos^3 x=0$	1
$\cos x=0$ diperoleh $x=\pm 90^0, \pm 270^0, \pm 450^0,\ldots$	1
Buat garis bilangan memuat titik-titik batas 	1
Sementara itu, pembilang = nol jika	
$(1+\sin x)^2=0 \to \sin x=-1 \to x=\begin{cases}270^0,630^0,990^0,\ldots\\ -90^0,-450^0,-810^0,\ldots\end{cases}$	1
Untuk nilai-nilai x ini, $\cos x=0$ dan untuk nilai-nilai ini $f''(x)=\frac{0}{0}$ tidak terdefinisi. Kita coba hitung ulang limitnya, misalkan pada $x=270^0$	1
$\lim\limits_{x\to 270^0} f''(x)=\lim\limits_{x\to 270^0}\dfrac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$	1
$=\lim\limits_{x\to 270^0}\dfrac{2(1+\sin x)(\cos x)}{3\cos^2 x\,(-\sin x)}$	1
$=\lim\limits_{x\to 270^0}\dfrac{2(1+\sin x)}{3\cos x\,\sin x}$	1
$=\lim\limits_{x\to 270^0}\dfrac{2+2\sin x}{-\frac{3}{2}\sin 2x}$	1
$=\lim\limits_{x\to 270^0}\dfrac{0+2\cos x}{-\frac{3}{2}(\cos 2x)\,.\,2}$	1
$=\lim\limits_{x\to 270^0}\dfrac{2.0}{-\frac{3}{2}(-1)\,2}=0$	1
Bisa diperiksa untuk nilai-nilai $x=\begin{cases}270^0,630^0,990^0,\ldots\\ -90^0,-450^0,-810^0,\ldots\end{cases}$	1
Berlaku $\lim\limits_{x\to x} f''(x)=0$	
Jadi untuk nilai-nilai $x=\begin{cases}270^0,630^0,990^0,\ldots\\ -90^0,-450^0,-810^0,\ldots\end{cases}$	1
$f''(x)$ tidak terdefinisi, namun kita bisa anggap itu adalah titik belok dalam pengertian limit yaitu $\lim\limits_{x\to x} f''(x)=0$. Sekarang kita isi positif-negatif pada garis bilangannya. Cek untuk $x=0$ dan $f''(x)=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$ sehingga	1 1 1 1
$f''(x)=\dfrac{(1+\sin 0)^2}{\cos^3 0}$	1
$f''=\frac{(1+0)^2}{1^3}$	1
$f''=1>0$ (positif)	
Untuk daerah lain tinggal disesuaikan positif-negatifnya (selang-seling) 	1
Jadi, Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $(-90^0,90^0)+k.360^0$, cekung ke bawah pada interval $(90^0,270^0)+k.360^0$, dan tidak memiliki titik belok, namun jika dianggap ada dalam pengertian limit, maka titik beloknya terjadi pada $x=\begin{cases}270^0,630^0,990^0,\ldots\\ -90^0,-450^0,-810^0,\ldots\end{cases}$	1 1 1
2. Perhatikan bahwa jari-jari karton terpotong dengan panjang 8	1

cm akan menjadi garis pelukis kerucut, dan keliling karton terpotong *s* (*lihat gambar!*) akan menjadi keliling lingkaran alas kerucut.	
	1 1 1
Misal panjang busur yang terpotong = *b* (*lihat gambar di atas!*).	1
Misalkan pula jari-jari dan tinggi kerucut yang terbentuk berturut-turut adalah r dan t (*lihat gambar di atas!*)	1
Misal *K* = keliling kertas karton lingkaran mula-mula, maka K = 2π.8 = 16π cm. Dari definisi sudut dalam radian,	
$\theta = \dfrac{\text{panjang busur di depan sudut } \theta}{\text{jari-jari lingkaran}}$	1
$= \dfrac{b}{8} \rightarrow b = 80 \text{ cm}$	1
Karena s menjadi keliling lingkaran alas kerucut yang terbentuk, maka berlaku:	1
$s = 2\pi r$	1
$K = s + b$	1
$16\pi = 2\pi r + 80$	1
$2\pi r = 16\pi - 80$	
$r = \dfrac{16\pi - 80}{2\pi}$	1
$r = 8 - \frac{4}{\pi}\theta$	1
Karena t, r dan garis pelukis 8 cm membentuk segitiga siku-siku, berlaku:	
$t = \sqrt{8^2 - r^2} = \sqrt{64 - r^2}$	1
Volume kerucut yang terbentuk:	1
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 t$	1
$= \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{64 - r^2}$	
Volume akan mencapai maksimum ketika turunannya nol,	1

$\dfrac{dV}{d\theta} = 0$	1
$\dfrac{dV}{dr}\dfrac{dr}{d\theta} = 0$	
$\dfrac{1}{3}\pi\left\{2r\sqrt{64 - r^2} + r^2 . \dfrac{1}{2}(64 - r^2)^{-\frac{1}{2}}(-2r)\right\}\left(-\dfrac{4}{\pi}\right) = 0$	1
(Gunakan turunan *u.v* yaitu *u'v* + *uv'* dengan *u* = r^2)	1
dan $v = \sqrt{64 - r^2}$ sedangkan $\dfrac{dV}{d\theta} = \left(-\dfrac{4}{\pi}\right)$ didapat karena $r = 8 - \frac{4}{\pi}\theta$)	1
$-\dfrac{4}{3}\left\{2r\sqrt{64 - r^2} - r^3 . \dfrac{1}{\sqrt{64 - r^2}}\right\} = 0$	1
$2r\sqrt{64 - r^2} - r^3 . \dfrac{1}{\sqrt{64 - r^2}} = 0$	1
$2r\sqrt{64 - r^2} = r^3 . \dfrac{1}{\sqrt{64 - r^2}}$	1
$2\sqrt{64 - r^2} = r^2 . \dfrac{1}{\sqrt{64 - r^2}}$	1 1
$2(64 - r^2) = r^2$	1
$128 - 2r^2 = r^2$	
$128 = 3r^2$	1
$r^2 = \dfrac{128}{3}$	1
$r = \sqrt{\dfrac{128}{3}}$	1
$= \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	1
$= \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	1
$= \frac{8}{3}\sqrt{6}$	
Untuk mendapatkan sudut *θ*, kita gunakan persamaan yang sudah ada	1
$r = 8 - \dfrac{4}{\pi}\theta$	1
$\frac{8}{3}\sqrt{6} = 8 - \dfrac{4}{\pi}\theta$	1
$\dfrac{4}{\pi}\theta = 8 - \frac{8}{3}\sqrt{6}$	1

$\theta = \frac{4}{\pi}\left(8 - \frac{8}{3}\sqrt{6}\right)$ $\theta = \left(2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)\pi$ Atau jika diukur dalam satuan derajat, maka: $\theta = \left(2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) \times 180^0$ $\theta = 66^0$	1 1 1
3. Kurva $3xy + y - x + 6 = 0$ memotong sumbu-x di sebuah titik A, artinya ordinat $y_A = 0$, subtitusi $y_A = 0$ ke persamaan kurva diperoleh: $3x_A(0) + 0 - x_A + 6 = 0 \rightarrow x_A = 6$ Jadi koordinat $A(x_A, y_A) = A(6,0)$ Mencari gradien kurva di titik $A(6,0)$. t $3xy + y - x + 6 = 0$ $y(3x+1) = x - 6 \Leftrightarrow y = \frac{x-6}{3x+1}$ bentuk $\frac{u}{v}$ $u = x - 6 \Rightarrow u' = 1$ $v = 3x + 1 \Rightarrow v' = 3$ $y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2} = \frac{1(3x+1) - (x-6)(3)}{(3x+1)^2}$ Gradien kurva di titik A(6,0) adalah $m(x=6) \rightarrow y'(x=6) = \frac{[3(6)+1] - 3[(6-6)]}{[3(6)+1]^2}$ $m = \frac{19-0}{(19)^2} = \frac{1}{19}$ Sudut yang dibentuk oleh garis singgung di A terhadap sumbu x positif adalah θ_A dengan $m = \tan\theta_A = \frac{1}{19}$ atau $\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{1}{19}\right)$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
4. $x = \cos 2\theta + 2\cos\theta$ $\frac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta - 2\sin\theta$ $y = \sin 2\theta - 2\sin\theta$ $\frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta - 2\cos\theta$ Gunakan aturan rantai $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2\theta - 2\cos\theta}{-2\sin 2\theta - 2\sin\theta} = \frac{2(\cos 2\theta - \cos\theta)}{-2(\sin 2\theta + \sin\theta)}$	1 1 1 1 1

Gunakan rumus penjumlahan/ selisih fungsi trigonometri $\frac{dy}{dx} = \frac{2\left[-2\sin\frac{1}{2}(2\theta+\theta)\sin\frac{1}{2}(2\theta-\theta)\right]}{-2\left[2\cos\frac{1}{2}(2\theta+\theta)\cos\frac{1}{2}(2\theta-\theta)\right]}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{-4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\theta}{2}$ ....**(terbukti)**	1 1
5. Perhatikan gambar berikut.  Misalkan pada saat t, sudut antara tangga dengan permukaan lantai adalah θ, jarak ujung bawah tangga ke dinding adalah x meter, dan jarak ujung atas tangga ke permukaan lantai adalah y meter. Oleh karena itu kecepatan vertikal ujung atas tangga dinyatakan, maka kita perlu menentukan $\frac{dy}{dt}$ pada saat tangga membentuk sudut 60^0 dengan permukaan lanatai dan $\frac{dx}{dt} = 2\ m/\det$. Berdasarkan gambar di atas, $\tan\theta = \frac{6}{x}$ atau $x\tan\theta = 6$ Turunan implisit terhadap t dari kedua ruas menghasilkan, $x\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} + \tan\theta\frac{dx}{dt} = 0$ ....(*)	1 1 1 1 1

Untuk $\theta = 60^0$ berlaku: (i) $x = \frac{6}{\tan 60^0} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (ii) $\frac{dx}{dt} = 2$ m/det Jika hasil di atas disubtitusikan ke persamaan (*) maka diperoleh, $2\sqrt{3}(4)\frac{d\theta}{dt} + \sqrt{3}(2) = 0$ $8\sqrt{3}\,\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}(2)$ $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4}$ ....(**) Jika kita melihat gambar di atas lagi, maka diperoleh $\sin\theta = \frac{y}{8}$ atau $y = 8\sin\theta$ Turunan implisit terhadap t dari kedua ruas menghasilkan, $\frac{dy}{dt} = 8\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$ $\frac{dy}{dt} = 8\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\frac{dy}{dt} = -1$ meter/detik Tanda negatif menunjukkan arah ke bawah. Jadi, kecepatan vertikal ujung atas tangga adalah -1 m/det	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Jumlah skor	**105**

$$\text{Nilai B} = \frac{\text{skor yang diperoleh}}{105} \times 100$$

Nilai Total = 70%Nilai B + 30%Nilai A

GLOSARIUM

Gradien	:	Tingkat kemiringan ruas garis ataupun garis.
Nilai Ekstrim	:	Nilai Maksimum dan nilai minimum.
Nilai Maksimum		Nilai paling besar dari fungsi untuk semua daerah asal.
Nilai minimum	:	Nilai terkecil dari suatu fungsi pada daerah domain fungsi tersebut.
Persamaan garis singgung	:	Persamaan kurva yang memiliki bentuk umum $ax + by + c = 0$
Teorema Kecekungan	:	Andaikan *f* terdiferensiasi dua kali pada interval terbuka *I*, maka berlaku: 1. Jika *f"(x) > 0* untuk semua *x* dalam *I*, maka *f* cekung ke atas pada *I* 2. Jika *f"(x)* < 0 untuk semua *x* dalam *I*, maka *f* cekung ke bawah pada *I*
Teorema Kemonotonan	:	Andaikan *f* kontinu pada interval *I* dan terdiferensiasi pad setiap titik dalam *I*, maka berlaku: 1. Jika *f'(x) > 0* untuk semua titik dalam *I*, maka *f* naik pada *I* 2. Jika *f'(x)* < 0 untuk semua titik dalam *I*, maka *f* turun pada *I*
Teorema Nilai Balik	:	Misalkan *y = f(x)* terdefinisi pada selang a < x < b yang memuat *c*, *f'(x)* dan *f"(x)* ada untuk setiap titik pada selang *a< x < b* misalkan juga *f'(c) = 0,* yang berarti *x = c* adalah absis titik balik. Berlaku 1. *f"(c) < 0* maka *f(c)* adalah nilai balik maksimum. 2. *f"(c) > 0* maka *f(c)* adalah nilai balik minimum. 3. *f"(c) = 0* maka *f(c)* adalah titik belok.
Titik balik atau titik kritis	:	Suatu titik di dalam grafik dengan turunan kurva pertama yang sama dengan nol.

SARAN REFERENSI

Purcell, E.J. dan Varberg, D. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* (Edisi) kelima. Alih bahasa Oleh: Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh. Bandung: Erlangga.

DAFTAR PUSTAKA

Handayani, D. (2016). *Matematika Peminatan SMA/MA Kelas XII.* Diakses dari https://www.m4th-lab.net. Html.

Kanginan, M, dkk. (2016). *Matematika untuk Siswa SMA/MA Kelas XII Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam.* Bandung: Yrama Widya.

Muslim. (2018). *Soal-Jawab Matematika Peminatan.* Diakses dari https:www.papankecil. wordpress.com.

Purcell, E.J. dan Varberg, D. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* (Edisi) Kelima. Alih bahasa Oleh: Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh. Bandung: Erlangga.

Sembiring, S, dkk. (2016). *Matematika untuk Siswa SMA/ MA Kelas XII*. Bandung: Penerbit SEWU (Srikandi Empat Widya Utama).

Tasari, dkk. (2016). *Matematika untuk Siswa SMA/MA Kelas XII Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam*. Klaten: Intan Pariwara.

TENTANG PENULIS

Nama : **Hendra Lesmana, M.Pd.**
HP/ WA : 0878 6955 5390
Facebook : Hendra Lesmana
Email : *hendralesmana1302@gmail.com*
Alamat : Kab.OKU Timur, Sum-Sel
Bidang Keahlian:
Matematika, Musik, Kimia, dan Komputer.

Riwayat Pendidikan Tinggi:
1. S-1 Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2007-2011).
2. S-2 Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2011-2013).

Riwayat Pekerjaan:
1. Dosen di Sekolah Tinggi Ilmu Pertanian Belitang (2014-2018).
2. Tutor Tatap Muka di Universitas Terbuka (2014-sekarang).
3. Guru di SMK Negeri 1 Belitang Madang Raya (2018-2018).
4. Dosen di STKIP Muhammadiyah OKU Timur (2019-sekarang).

Penelitian 10 tahun terakhir:
1. Pembelajaran Matematika Berbasis Komputer pada Pokok Bahasan Trigonometri di Kelas X SMA Negeri 1 Belitang.
2. Pengembangan Soal Non Rutin Berbasis Komputer untuk Melatih Penggunaan Kemampuan Matematika Siswa di Kelas VIII SMP Negeri 2 Belitang III.

Nama : **Renny Anggraini, S.Pd.**
HP/ WA : 0823 7234 2326
Alamat : Jl. Kimarogan RT 43 RW 9 No. 2554 Kertapati Palembang
Instansi : PKBM *Home shooling* Primagama Palembang.
Alamat Instansi : Jln. Teuku Umar Bukit Kecil-Ilir Barat Timur II Palembang.
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika.
Riwayat Pendidikan Tinggi :
1. S-1 Pendidikan Matematika.
Riwayat Pekerjaan:
1. Guru di PKBM *Home Scholling* Palembang.

Nama: **Drs. G. Kundaru**
HP/ WA: 0812 6160 6600
Email: kundaruikip@gmail.com
Kantor : BP PAUD dan DIKMAS Sumsel.
Alamat Kantor: Jl. Naskah II No. 714 km 7
Sukarame Palembang, Sumsel Kode Pos 30153
Bidang Keahlian: Pendidikan Luar Sekolah.
Riwayat Pendidikan Tinggi:
S-1 Pendidikan Luar Sekolah, IKIP Jogjakarta (Angkatan 1979).
Riwayat Pekerjaan:
Pamong Belajar Madya di BP PAUD dan DIKMAS Sumsel.

catatan: